Питання до повторного іспиту з теорії міри та інтеграла

На оцінку «задовільно» достатньо вчити ЛИШЕ доведення, виділені **жирним**, а також знати усі означення і формулювання і вміти розв'язувати прості задачі

Основні класи множин

Універсальна множина X; 2^X.

Означення півкільця множин. Приклади: півкільце півінтервалів, прямокутників, брусів.

Означення кільця множин. **Замкненість кільця відносно перетинів; порожня множина належить кільцю; замкненість кільця відносно операції симетричної різниці.**

Означення алгебри множин. **Доповнення елемента алгебри належить до алгебри.** Приклади алгебри.

Властивості кільця: замкненість відносно взяття скінченних об'єднань і перетинів.

Означення $\sigma-$кільця і $\sigma-$алгебри. Приклади $\sigma-$алгебр. **Кільце K_1 вимірних за Жорданом множин; K_1- не $\sigma-$кільце. Замкненість $\sigma-$кільця відносно взяття зліченних перетинів.**

Означення зростаючих, спадних і монотонних послідовностей множин. Границя монотонної послідовності множин. Приклади.

Означення монотонного класу. Приклади монотонних і немонотонних класів.

$\sigma-$кільце є монотонним класом. Кільце, що є монотонним класом, є також $\sigma-$кільцем.

Породжені класи

Лема про перетин сукупності кілець. Означення мінімального кільця. Означення мінімальних: алгебри, $\sigma-$кільця, $\sigma-$алгебри, монотонного класу.

Лема про різницю елемента півкільця і скінченного об'єднання елементів півкільця.

Теорема про породжене кільце.

Означення борелевих множин і борелевої $\sigma-$алгебри в метричному просторі. **Приклади борелевих множин: відкриті, замкнені, одноточкові та не більш ніж зліченні множини. Приклади борелевих множин на прямій. Борелева $\sigma-$алгебра як $\sigma-$алгебра, породжена півкільцем півінтервалів.**

Теорема про породжений монотонний клас.

Функції множин

Символ $+\infty$, операції з ним. Означення функції множин як такої, що не тотожна до $+\infty$.

Означення функцій множин: невід'ємної, монотонної, адитивної, півадитивної, скінченної, $\sigma-$адитивної, $\sigma-$ півадитивної, $\sigma-$скінченної. **Зауваження: $\sigma-$адитивна функція множин на півкільці є адитивною і дорівнює нулеві на порожній множині.**

Означення міри (на півкільці). **Зокрема, міра від порожньої множини дорівнює нулю і є адитивною. Приклад адитивної невід'ємної функції множин, яка не є мірою.**

Властивості міри на кільці: монотонність; μ від різниці множин B, A, де $A \subset B$; пів-адитивність, $\sigma-$ півадитивність.

Неперервність міри знизу. Неперервність міри зверху. Приклад: умову $\mu(B_1) < \infty$ відкинути не можна.

Приклади мір

Дискретна міра (на зліченній множині).
Конструкція міри Жордана $m(\bullet)$ на кільці K_m. Апроксимація вимірної за Жорданом множини відкритими і замкненими множинами. Теорема: $m(\bullet)$ є мірою. **Наслідки для функції довжини на P_1 і функції об'єму для P_m.**
Лема про адитивну і невід'ємну функцію множин на півкільці. Функція множин λ_F на P_1. Теорема про те, що вона є мірою.

Продовження міри

Означення продовження функції множин. Приклад: довжина на P_1 і міра Жордана на K_1. **Теорема про продовження міри з півкільця на кільце.** Зауваження: таке продовження зберігає як скінченність, так і $\sigma-$скінченність. Приклади: продовження функції довжини і функції площі з відповідних півкілець.

Зовнішня міра

Означення зовнішньої міри (на 2^X). Приклад неадитивної зовнішньої міри.
Задання за мірою на кільці функції множин на 2^X. **Теорема: це зовнішня міра; вона називається зовнішньою мірою, породженою мірою, що задана на кільці. Приклади породжених зовнішніх мір:**

1. **для міри на $K = \{\varnothing, X\}$;**
2. **для міри на півкільці півінтервалів з кінцями $k, k+1$.**

Вимірність за Каратеодорі

Означення вимірності множини за *Каратеодорі.* **Зауваження: для вимірності достатньо доводити лише нерівність; порожня і універсальна множини завжди вимірні за Каратеодорі. Продовження прикладу 1: описати усі вимірні множини.**
Теорема Каратеодорі (про клас множин, вимірних відносно зовнішньої міри).
Означення повної міри. Приклад неповної міри. **Наслідок з теореми Каратеодорі: $\overline{\mu}$ є повною мірою.**
Теорема про вимірність елементів початкового кільця. **Наслідок про включення класів множин при виконанні умов теореми Каратеодорі. Продовження прикладу 2: описати усі вимірні множини.**
Теорема про наближення елементами кільця. Теорема про єдиність продовження міри на породжене $\sigma-$кільце.

Міра Лебега

Конструкція міри Лебега на прямій: функція довжини, її продовження з півкільця на кільце, зовнішня міра Лебега, означення класу S вимірних за Лебегом множин. **Кожна борелева множина вимірна за Лебегом. Приклади вимірних за Лебегом множин на прямій та обчислення їх мір: одноточкова множина, скінченний відкритий інтервал, не більш ніж зліченна множина (приклади таких), відкрита множина.** Хронологічна таблиця різних продовжень функції довжини.
Конструкція міри Лебега в евклідовому просторі. Означення $\sigma-$алгебри S_m вимірних за Лебегом множин. **Теорема про те, що міра Лебега є продовженням міри Жордана.** Типовий приклад невимірної множини.

Конструкція міри Лебега - Стільтьєса.

Заряди

Означення заряду (на $\sigma-$алгебрі). **Зауваження: заряд від порожньої множини, адитивність, скінченність заряду від підмножини кожної множини скінченного заряду**, неперервність знизу і зверху. Приклад: дискретний заряд (на N).
Додатна і негативна множина. Лема про існування негативної підмножини. Теорема про розклад Гана універсального простору. Означення розкладу Гана. Приклад: розклад Гана для випадку дискретної міри.
Теорема про розклад Жордана заряду. Означення розкладу Жордана. **Неєдиність розкладу Жордана, але єдиність такого розкладу, якщо він породжений деяким розкладом Гана.**

Відображення вимірних просторів

Означення вимірного простору і простору з мірою.
Загальні властивості відображень: прообраз множини, прообраз від об'єднання, перетину і різниці; **прообраз $\sigma-$алгебри є також $\sigma-$алгеброю**.
Означення вимірного відображення. Приклади таких відображень: тотожне, довільне у випадку $S_X = 2^X$. Означення вимірності відображення, заданого на вимірній підмножині.
Критерій вимірності відображення в термінах породжуючого класу множин.

Властивості вимірних функцій

Означення вимірної функції із значеннями в R. **Приклад: індикатор. Наслідок з критерію вимірності про 5 еквівалентних умов.**
Розширена пряма і борелева $\sigma-$алгебра на ній. Лема про породження такої борелевої $\sigma-$алгебри нескінченними проміжками. Означення вимірної функції із значеннями в $\overline{R}$. Наслідок з критерію вимірності для такої функції.
Означення функції на R^m, вимірної за Лебегом. Означення у випадку, коли функція задана на вимірній за Лебегом множині.
Означення борелевої функції на метричному просторі, а також на борелевій підмножині метричного простору. **Якщо функція борелева, то вона вимірна за Лебегом.**
Приклади борелевих функцій: індикатор від борелевої множини, неперервна функція на борелевій множині, монотонна функція на відкритому проміжку.
Теорема про вимірність суперпозиції відображень. Наслідок про функцію $F(f_1,..., f_m)$.

Операції над вимірними функціями

Теорема про операції над вимірними функціями. Застосування: $fI_A + gI_B$, проста вимірна функція, вимірність множини $\{f \le g\}$, вимірність додатної і від'ємної частини функції.
Теорема про граничний перехід для вимірних функцій.
Означення простої функції. Канонічне представлення простої вимірної функції. Критерій вимірності невід'ємної функції в термінах простих функцій. **Наслідок про вимірну функцію довільного знаку.**

Збіжність майже скрізь

Означення: властивість виконується майже скрізь; еквівалентне означення для випадку повної міри. Приклади.
Означення еквівалентних функцій; еквівалентне означення для випадку повної міри і для випадку вимірних функцій. Приклад: функція Діріхле. **Теорема про вимірність еквівалентної функції.**
Означення збіжності майже скрізь; еквівалентне означення для випадку повної міри і для випадку вимірних функцій. Приклади. **Теорема про єдиність границі. Теорема про вимірність граничної функції.**
Означення верхньої і нижньої границі послідовності множин. Формули для цих границь. Теорема Єгорова. Приклад: у теоремі Єгорова не можна відкинути умову скінченності міри.

Збіжність за мірою

Означення збіжності за мірою. **Теорема про єдиність границі. Приклад: сходинка, що пливе.** Теорема Лебега про зв'язок між двома збіжностями.
Означення фундаментальності за мірою. **Із збіжності за мірою випливає фундаментальність за мірою.** Лема Рісса про фундаментальну за мірою послідовність. Наслідки: теорема Рісса, критерій збіжності за мірою.

Абстрактний інтеграл Лебега

І частина означення: інтеграл від простої невід'ємної функції. **Коректність. Монотонність.**
ІІ частина означення: інтеграл від невід'ємної функції. **ІІ частина означення не суперечить І-й. Приклад: інтеграл від** $f(x)=x.$
ІІІ частина означення: інтеграл від вимірної функції. Означення інтегрованої функції. Простір $L(A,\lambda).$ **Приклад:** $f(x)=sign\ x.$ Інтеграл для функції із значеннями в $\overline{R}.$ Інтеграл по порожній множині.
Елементарні властивості інтеграла Лебега: інтеграл по множині нульової міри, інтеграл від сталої, монотонність інтеграла від невід'ємної функції, інтеграл від обмеженої функції, монотонність інтеграла для інтегрованих функцій, однорідність інтеграла, монотонність інтеграла як функції множини, інтегрованість – спадкова властивість.

Подальші властивості інтеграла Лебега

Теорема про $\sigma-$адитивність інтеграла від невід'ємної функції. **Наслідок для інтегрованої функції. Наслідок: інтеграл від монотонної послідовності множин.**
Теорема про адитивність інтеграла. Наслідки: інтеграл не залежить від значень на множині нульової міри, інтеграли від еквівалентних функцій співпадають. Приклад: функція Діріхле.
Подальші властивості: інтегрованість рівносильна абсолютній інтегрованості, твердження з інтегрованою мажорантою, інтегрована функція скінченна майже скрізь, коли інтеграл від невід'ємної функції дорівнює 0, наслідок: коли інтеграл по кожній вимірній множині дорівнює 0.

Граничні теореми

Теорема Лебега про монотонну збіжність.
Теорема про лінійність інтеграла. **Наслідки: інтеграл від суми ряду, складеного з невід' єм- них функцій; оцінка для модуля інтеграла.**

Теорема Беппо Леві. Теорема Фату.
Теорема Лебега про мажоровану збіжність.

Порівняння інтегралів Рімана і Лебега

Теорема про зв'язок між власним інтегралом Рімана і інтегралом Лебега.
Лема про неперервність обмеженої функції в точці. Критерій інтегрованості за Ріманом у термінах точок розриву.
Лема про вимірність за Лебегом функції, інтегрованої за Ріманом на кожному скінченному проміжку. Теорема про зв'язок між невласним інтегралом Рімана і інтегралом Лебега.

Інтеграл Лебега як функція від параметра

Теорема про неперервну залежність інтеграла Лебега від параметра.
Теорема про диференційованість інтеграла Лебега.
Інтеграл Лебега-Стільтьєса.

Заміна змінної під знаком інтеграла Лебега.

Міра, породжена відображенням. Два приклади.
Теорема: загальна формула заміни змінної. Приклад.

Абсолютна неперервність і сингулярність мір і зарядів

Означення абсолютної неперервності заряду відносно міри. Два приклади.
Означення сингулярності заряду до міри. Еквівалентне означення для мір. Взаємно сингулярні міри: два приклади.
Критерій абсолютної неперервності заряду.
Означення похідної Радона-Нікодіма. **Єдиність похідної з точністю до еквівалентності. Невід'ємність похідної для мір**. Два приклади обчислення похідної.
Теорема Лебега про розклад заряду (без доведення). Приклади.
Теорема Радона-Нікодіма (без доведення). **Наслідок: формула заміни міри.**

Абсолютно неперервні та сингулярні функції

Означення. Два приклади. Теорема: якщо функція абсолютно неперервна, то вона має обмежену варіацію.
Відповідність між неперервними справа функціями обмеженої варіації та зарядами.
Критерій абсолютної неперервності функції в термінах заряду.
Теорема про формулу Ньютона-Лейбніца для абсолютно неперервних функцій (без доведення). **Наслідок: коли похідна рівна нулю м.с.** Теорема Лебега про похідну від функції обмеженої варіації (без доведення).
Канторова множина і її властивості. Канторові сходи, властивості.
Означення сингулярної функції. Теорема про розклад неперервної функції обмеженої варіації. Наслідок: розклад неперервної справа функції обмеженої варіації.

Подвійний інтеграл

Вимірні прямокутники. **Добуток двох $\sigma-$алгебр утворює півкільце.** Добуток вимірних просторів.

Перерізи множини з добутку просторів. Приклади. **Теорема про вимірність перерізів множини.**
Перерізи функції від двох змінних. **Теорема про вимірність перерізів функції.**
Теорема про добуток мір.
Зауваження: добуток повних мір не завжди є повною мірою, процедура поповнення, приклад; **критерій того, що добуток мір на певній множині дорівнює нулю; принцип Кавальєрі.**
Однократні, повторні та подвійні інтеграли. Теорема Фубіні. Зауваження про теорему Фубіні для поповненого добутку мір.

Простір L_p

Спряжений індекс. **Нерівність Юнга. Нерівність Гельдера. Нерівність Мінковського.**
Означення простору L_p. Ототожнення функцій в L_p. Означення L_p – норми. Породжена метрика, збіжність.
Теорема про повноту L_p.
Теорема про щільність інтегрованих простих функцій в L_p. Теорема про щільність простих функцій, породжених півкільцем. Наслідок для східчастих функцій.
Теорема про щільність фінітних неперервних функцій. Наслідок про щільність неперервних на відрізку функцій.
Теорема про сепарабельність просторів $L_p[a,b]$ та $L_p(R)$.
Істотно обмежені функції. L_∞ - норма і лема про те, що в її означенні досягається мінімум.

Елементи функціонального аналізу

Лінійні нормовані простори: дійсні і комплексні. Означення норми. **Властивості: оцінка модуля від різниці норм, породжена метрика, неперервність норми.**
Означення простору Банаха. Приклади: $R, C, R^m, C^m, C[a,b]$ (дійсний і комплексний).
Простори $L_p, L_p[a,b], L_p(R)$ (дійсні й комплексні), $1 \le p < \infty$. Простори R_p^m, C_p^m. **Простір** l_p **: збіжність, сепарабельність.** Простір L_∞, несепарабельний простір l_∞. **Неповнота простору інтегрованих за Ріманом функцій із середньоквадратичною нормою.**
Розмірність лінійного простору: скінченна, нескінченна. Розмірності основних просторів.
Еквівалентні норми породжують однакову збіжність. Теорема про еквівалентність усіх норм на скінченновимірному просторі.

Простори зі скалярним добутком

Означення скалярного добутку в комплексному і дійсному випадку. Приклади: R^m, C^m.
Властивості скалярного добутку: антилінійність за другим аргументом, нерівність Коші-Шварца, рівність паралелограма.
Породжена норма, поляризаційна тотожність. **Теорема про неперервність скалярного добутку.**

Гільбертові простори

Означення. Приклади: R, R^m, C^m, L_2, l_2.
Лінійна множина та підпростори в нормованих просторах. Приклади.

Ортогональність векторів у гільбертовому просторі. Ортогональність вектора до множини. Ортогональне доповнення до множини. **Лема: ортогональне доповнення є підпростором.**
Теорема про найкраще наближення елементами підпростору. Теорема про ортогональний розклад гільбертового простору.