Питання до іспиту з теорії міри та інтеграла

Основні класи множин

Універсальна множина X; 2^X.
Означення півкільця множин. Приклади: півкільце півінтервалів, прямокутників, брусів.
Означення кільця множин. Замкненість кільця відносно перетинів; порожня множина належить кільцю; замкненість кільця відносно операції симетричної різниці.
Означення алгебри множин. Доповнення елемента алгебри належить до алгебри. Приклади алгебри.
Властивості кільця: замкненість відносно взяття скінченних об'єднань і перетинів.
Означення $\sigma-$кільця і $\sigma-$алгебри. Приклади $\sigma-$алгебр. Кільце K_1 вимірних за Жорданом множин; K_1 - не $\sigma-$кільце. Замкненість $\sigma-$кільця відносно взяття зліченних перетинів.
Означення зростаючих, спадних і монотонних послідовностей множин. Границя монотонної послідовності множин. Приклади.
Означення монотонного класу. Приклади монотонних і немонотонних класів.
$\sigma-$кільце є монотонним класом. Кільце, що є монотонним класом, є також $\sigma-$кільцем.

Породжені класи

Лема про перетин сукупності кілець. Означення мінімального кільця. Означення мінімальних: алгебри, $\sigma-$кільця, $\sigma-$алгебри, монотонного класу.
Лема про різницю елемента півкільця і скінченного об'єднання елементів півкільця.
Теорема про породжене кільце.
Означення борелевих множин і борелевої $\sigma-$алгебри в метричному просторі. Приклади борелевих множин: відкриті, замкнені, одноточкові та не більш ніж зліченні множини. Приклади борелевих множин на прямій. Борелева $\sigma-$алгебра як $\sigma-$алгебра, породжена півкільцем півінтервалів.
Теорема про породжений монотонний клас.

Функції множин

Символ $+\infty$, операції з ним. Означення функції множин як такої, що не тотожна до $+\infty$.
Означення функцій множин: невід'ємної, монотонної, адитивної, півадитивної, скінченної, $\sigma-$адитивної, $\sigma-$ півадитивної, $\sigma-$скінченної. Зауваження: $\sigma-$адитивна функція множин на півкільці є адитивною і дорівнює нулеві на порожній множині.

Означення міри (на півкільці). Зокрема, міра від порожньої множини дорівнює нулю і є адитивною. Приклад адитивної невід'ємної функції множин, яка не є мірою.
Властивості міри на кільці: монотонність; μ від різниці множин $B, A,$ де $A \subset B$; пів адитивність, $\sigma-$ півадитивність.
Неперервність міри знизу. Неперервність міри зверху. Приклад: умову $\mu(B_1) < \infty$ відкинути не можна.

Приклади мір

Дискретна міра (на зліченній множині).

Конструкція міри Жордана $m(\bullet)$ на кільці K_m. Апроксимація вимірної за Жорданом множини відкритими і замкненими множинами. Теорема: $m(\bullet)$ є мірою. Наслідки для функції довжини на P_1 і функції об'єму для P_m.
Лема про адитивну і невід'ємну функцію множин на півкільці. Функція множин λ_F на P_1. Теорема про те, що вона є мірою.

Продовження міри

Означення продовження функції множин. Приклад: довжина на P_1 і міра Жордана на K_1. Теорема про продовження міри з півкільця на кільце. Зауваження: таке продовження зберігає як скінченність, так і $\sigma-$скінченність. Приклади: продовження функції довжини і функції площі з відповідних півкілець.

Зовнішня міра

Означення зовнішньої міри (на 2^X). Приклад неадитивної зовнішньої міри.

Задання за мірою на кільці функції множин на 2^X. Теорема: це зовнішня міра; вона називається зовнішньою мірою, породженою мірою, що задана на кільці. Приклади породжених зовнішніх мір:

1. для міри на $K = \{\varnothing, X\}$;
2. для міри на півкільці півінтервалів з кінцями $k, k+1$.

Вимірність за Каратеодорі

Означення вимірності множини за *Каратеодорі.* Зауваження: для вимірності достатньо доводити лише нерівність; порожня і універсальна множини завжди вимірні за Каратеодорі. Продовження прикладу 1: описати усі вимірні множини.
Теорема Каратеодорі (про клас множин, вимірних відносно зовнішньої міри).
Означення повної міри. Приклад неповної міри. Наслідок з теореми Каратеодорі: $\bar{\mu}$ є повною мірою.
Теорема про вимірність елементів початкового кільця. Наслідок про включення класів множин при виконанні умов теореми Каратеодорі. Продовження прикладу 2: описати усі вимірні множини.
Теорема про наближення елементами кільця. Теорема про єдиність продовження міри на породжене $\sigma-$кільце.

Міра Лебега

Конструкція міри Лебега на прямій: функція довжини, її продовження з півкільця на кільце, зовнішня міра Лебега, означення класу S вимірних за Лебегом множин. Кожна борелева множина вимірна за Лебегом. Приклади вимірних за Лебегом множин на прямій та обчислення їх мір: одноточкова множина, скінченний відкритий інтервал, не більш ніж злічення множина (приклади таких), відкрита множина. Хронологічна таблиця різних продовжень функції довжини.
Конструкція міри Лебега в евклідовому просторі. Означення $\sigma-$алгебри S_m вимірних за Лебегом множин. Теорема про те, що міра Лебега є продовженням міри Жордана. Типовий приклад невимірної множини.
Конструкція міри Лебега - Стільтьєса.

Заряди

Означення заряду (на $\sigma-$алгебрі). Зауваження: заряд від порожньої множини, адитивність, скінченність заряду від підмножини кожної множини скінченного заряду, неперервність знизу і зверху. Приклад: дискретний заряд (на N).
Додатна і негативна множина. Лема про існування негативної підмножини. Теорема про розклад Гана універсального простору. Означення розкладу Гана. Приклад: розклад Гана для випадку дискретної міри.
Теорема про розклад Жордана заряду. Означення розкладу Жордана. Неєдиність розкладу Жордана, але єдиність такого розкладу, якщо він породжений деяким розкладом Гана.

Відображення вимірних просторів

Означення вимірного простору і простору з мірою.
Загальні властивості відображень: прообраз множини, прообраз від об'єднання, перетину і різниці; прообраз $\sigma-$алгебри є також $\sigma-$алгеброю.
Означення вимірного відображення. Приклади таких відображень: тотожне, довільне у випадку $S_X = 2^X$. Означення вимірності відображення, заданого на вимірній підмножині.
Критерій вимірності відображення в термінах породжую чого класу множин.

Властивості вимірних функцій

Означення вимірної функції із значеннями в R. Приклад: індикатор. Наслідок з критерію вимірності про 5 еквівалентних умов.
Розширена пряма і борелева $\sigma-$алгебра на ній. Лема про породження такої борелевої $\sigma-$алгебри нескінченними проміжками. Означення вимірної функції із значеннями в $\overline{R}$. Наслідок з критерію вимірності для такої функції.
Означення функції на R^m, вимірної за Лебегом. Означення у випадку, коли функція задана на вимірній за Лебегом множині.
Означення борелевої функції на метричному просторі, а також на борелевій підмножині метричного простору. Якщо функція борелева, то вимірна за Лебегом.
Приклади борелевих функцій: індикатор від борелевої множини, неперервна функція на борелевій множині, монотонна функція на відкритому проміжку.
Теорема про вимірність суперпозиції відображень. Наслідок про функцію $F(f_1,..., f_m)$.

Операції над вимірними функціями

Теорема про операції над вимірними функціями. Застосування: $fI_A + gI_B$, проста вимірна функція, вимірність множини $\{f \le g\}$, вимірність додатної і від'ємної частини функції.
Теорема про граничний перехід для вимірних функцій.
Означення простої функції. Канонічне представлення простої вимірної функції. Критерій вимірності невід'ємної функції в термінах простих функцій. Наслідок про вимірну функцію довільного знаку.

Збіжність майже скрізь

Означення: властивість виконується майже скрізь; еквівалентне означення для випадку повної міри. Приклади.
Означення еквівалентних функцій; еквівалентне означення для випадку повної міри і для випадку вимірних функцій. Приклад: функція Діріхле. Теорема про вимірність еквівалентної функції.

Означення збіжності майже скрізь; еквівалентне означення для випадку повної міри і для випадку вимірних функцій. Приклади. Теорема про єдиність границі. Теорема про вимірність граничної функції.
Означення верхньої і нижньої границі послідовності множин. Формули для цих границь. Теорема Єгорова. Приклад: у теоремі Єгорова не можна відкинути умову скінченності міри.

Збіжність за мірою

Означення збіжності за мірою. Теорема про єдиність границі. Приклад: сходинка, що пливе. Теорема Лебега про зв’язок між двома збіжностями.
Означення фундаментальності за мірою. Із збіжності за мірою випливає фундаментальність за мірою. Лема Рісса про фундаментальну за мірою послідовність. Наслідки: теорема Рісса, критерій збіжності за мірою.

Абстрактний інтеграл Лебега

I частина означення: інтеграл від простої невід’ємної функції. Коректність. Монотонність.
II частина означення: інтеграл від невід’ємної функції. II частина означення не суперечить I-й. Приклад: інтеграл від $f(x) = x$.
III частина означення: інтеграл від вимірної функції. Означення інтегрованої функції. Простір $L(A, \lambda)$. Приклад: $f(x) = sign\ x$. Інтеграл для функції із значеннями в $\overline{R}$. Інтеграл по порожній множині.
Елементарні властивості інтеграла Лебега: інтеграл по множині нульової міри, інтеграл від сталої, монотонність інтеграла від невід’ємної функції, інтеграл від обмеженої функції, монотонність інтеграла для інтегрованих функцій, однорідність інтеграла, монотонність інтеграла як функції множини, інтегрованість – спадкова властивість.

Подальші властивості інтеграла Лебега

Теорема про $\sigma-$адитивність інтеграла від невід’ємної функції. Наслідок для інтегрованої функції. Наслідок: інтеграл від монотонної послідовності множин.
Теорема про адитивність інтеграла. Наслідки: інтеграл не залежить від значень на множині нульової міри, інтеграли від еквівалентних функцій співпадають. Приклад: функція Діріхле.
Подальші властивості: інтегрованість рівносильна абсолютній інтегрованості, твердження з інтегрованою мажорантою, інтегрована функція скінченна майже скрізь, коли інтеграл від невід’ємної функції дорівнює 0, наслідок: коли інтеграл по кожній вимірній множині дорівнює 0.

Граничні теореми

Теорема Лебега про монотонну збіжність.
Теорема про лінійність інтеграла. Наслідки: інтеграл від суми ряду, складеного з невід’ємних функцій; оцінка для модуля інтеграла.
Теорема Беппо Леві. Теорема Фату.
Теорема Лебега про мажоровану збіжність.

Порівняння інтегралів Рімана і Лебега

Теорема про зв’язок між власним інтегралом Рімана і інтегралом Лебега.

Лема про неперервність обмеженої функції в точці. Критерій інтегрованості за Ріманом у термінах точок розриву.
Лема про вимірність за Лебегом функції, інтегрованої за Ріманом на кожному скінченному проміжку. Теорема про зв'язок між невласним інтегралом Рімана і інтегралом Лебега.

Інтеграл Лебега як функція від параметра

Теорема про неперервну залежність інтеграла Лебега від параметра.
Теорема про диференційованість інтеграла Лебега.
Інтеграл Лебега-Стільтьєса.

Заміна змінної під знаком інтеграла Лебега.

Міра, породжена відображенням. Два приклади.
Теорема: загальна формула заміни змінної. Приклад.

Абсолютна неперервність і сингулярність мір і зарядів

Означення абсолютної неперервності заряду відносно міри. Два приклади.
Означення сингулярності заряду до міри. Еквівалентне означення для мір. Взаємно сингулярні міри: два приклади.
Критерій абсолютної неперервності заряду.
Означення похідної Радона-Нікодіма. Єдиність похідної з точністю до еквівалентності.
Невід'ємність похідної для мір. Два приклади обчислення похідної.
Теорема Лебега про розклад заряду (без доведення). Приклади.
Теорема Радона-Нікодіма (без доведення). Наслідок: формула заміни міри.

Абсолютно неперервні та сингулярні функції

Означення. Два приклади. Теорема: якщо функція абсолютно неперервна, то вона має обмежену варіацію.
Відповідність між неперервними справа функціями обмеженої варіації та зарядами.
Критерій абсолютної неперервності функції в термінах заряду.
Теорема про формулу Ньютона-Лейбніца для абсолютно неперервних функцій (без доведення). Наслідок: коли похідна рівна нулю м.с. Теорема Лебега про похідну від функції обмеженої варіації (без доведення).
Канторова множина і її властивості. Каторові сходи, властивості.
Означення сингулярної функції. Теорема про розклад неперервної функції обмеженої варіації. Наслідок: розклад неперервної справа функції обмеженої варіації.

Подвійний інтеграл

Вимірні прямокутники. Добуток двох $\sigma-$алгебр утворює півкільце. Добуток вимірних просторів.
Перерізи множини з добутку просторів. Приклади. Теорема про вимірність перерізів множини.
Перерізи функції від двох змінних. Теорема про вимірність перерізів функції.
Теорема про добуток мір.
Зауваження: добуток повних мір не завжди є повною мірою, процедура поповнення, приклад; критерій того, що добуток мір на певній множині дорівнює нулю; принцип Кавальєрі.

Однократні, повторні та подвійні інтеграли. Теорема Фубіні. Зауваження про теорему Фубіні для поповненого добутку мір.

Простір L_p

Спряжений індекс. Нерівність Юнга. Нерівність Гельдера. Нерівність Мінковського.
Означення простору L_p. Ототожнення функцій в L_p. Означення L_p – норми. Породжена метрика, збіжність.
Теорема про повноту L_p.
Теорема про щільність інтегрованих простих функцій в L_p. Теорема про щільність простих функцій, породжених півкільцем. Наслідок для східчастих функцій.
Теорема про щільність фінітних неперервних функцій. Наслідок про щільність неперервних на відрізку функцій.
Теорема про сепарабельність просторів $L_p[a,b]$ та $L_p(R)$.
Істотно обмежені функції. L_∞ - норма і лема про те, що в її означенні досягається мінімум.

Елементи функціонального аналізу

Лінійні нормовані простори: дійсні і комплексні. Означення норми. Властивості: оцінка модуля від різниці норм, породжена метрика, неперервність норми.
Означення простору Банаха. Приклади: $R, C, R^m, C^m, C[a,b]$ (дійсний і комплексний).
Простори $L_p, L_p[a,b], L_p(R)$ (дійсні й комплексні), $1 \le p < \infty$. Простори R_p^m, C_p^m. Простір l_p: збіжність, сепарабельність. Простір L_∞, несепарабельний простір l_∞. Неповнота простору інтегрованих за Ріманом функцій із середньоквадратичною нормою.
Розмірність лінійного простору: скінченна, нескінченна. Розмірності основних просторів.
Еквівалентні норми породжують однакову збіжність. Теорема про еквівалентність усіх норм на скінченновимірному просторі.

Простори зі скалярним добутком

Означення скалярного добутку в комплексному і дійсному випадку. Приклади: R^m, C^m.
Властивості скалярного добутку: антилінійність за другим аргументом, нерівність Коші-Шварца, рівність паралелограма.
Породжена норма, поляризаційна тотожність. Теорема про неперервність скалярного добутку.

Гільбертові простори

Означення. Приклади: R, R^m, C^m, L_2, l_2.
Лінійна множина та підпростори в нормованих просторах. Приклади.
Ортогональність векторів у гільбертовому просторі. Ортогональність вектора до множини. Ортогональне доповнення до множини. Лема: ортогональне доповнення є підпростором.
Теорема про найкраще наближення елементами підпростору. Теорема про ортогональний розклад гільбертового простору.