Питання до колоквіуму з теорії міри та інтеграла

Основні класи множин

Універсальна множина X; 2^X.
Означення півкільця множин. Приклади: півкільце півінтервалів, прямокутників, брусів.
Означення кільця множин. Замкненість кільця відносно перетинів; порожня множина належить кільцю; замкненість кільця відносно операції симетричної різниці.
Означення алгебри множин. Доповнення елемента алгебри належить до алгебри. Приклади алгебри.
Властивості кільця: замкненість відносно взяття скінченних об'єднань і перетинів.
Означення $\sigma-$кільця і $\sigma-$алгебри. Приклади $\sigma-$алгебр. Кільце K_1 вимірних за Жорданом множин; K_1 - не $\sigma-$кільце. Замкненість $\sigma-$кільця відносно взяття зліченних перетинів.
Означення зростаючих, спадних і монотонних послідовностей множин. Границя монотонної послідовності множин. Приклади.
Означення монотонного класу. Приклади монотонних і немонотонних класів.
$\sigma-$кільце є монотонним класом. Кільце, що є монотонним класом, є також $\sigma-$кільцем.

Породжені класи

Лема про перетин сукупності кілець. Означення мінімального кільця. Означення мінімальних: алгебри, $\sigma-$кільця, $\sigma-$алгебри, монотонного класу.
Лема про різницю елемента півкільця і скінченного об'єднання елементів півкільця.
Теорема про породжене кільце.
Означення борелевих множин і борелевої $\sigma-$алгебри в метричному просторі. Приклади борелевих множин: відкриті, замкнені, одноточкові та не більш ніж зліченні множини. Приклади борелевих множин на прямій. Борелева $\sigma-$алгебра як $\sigma-$алгебра, породжена півкільцем півінтервалів.
Теорема про породжений монотонний клас.

Функції множин

Символ $+\infty$, операції з ним. Означення функції множин як такої, що не тотожна до $+\infty$.
Означення функцій множин: невід'ємної, монотонної, адитивної, півадитивної, скінченної, $\sigma-$адитивної, $\sigma-$ півадитивної, $\sigma-$скінченної. Зауваження: $\sigma-$адитивна функція множин на півкільці є адитивною і дорівнює нулеві на порожній множині.

Означення міри (на півкільці). Зокрема, міра від порожньої множини дорівнює нулю і є адитивною. Приклад адитивної невід'ємної функції множин, яка не є мірою.
Властивості міри на кільці: монотонність; μ від різниці множин $B, A,$ де $A \subset B$; пів адитивність, $\sigma-$ пів адитивність.
Неперервність міри знизу. Неперервність міри зверху. Приклад: умову $\mu(B_1) < \infty$ відкинути не можна.

Приклади мір

Дискретна міра (на зліченній множині).

Конструкція міри Жордана $m(\bullet)$ на кільці K_m. Апроксимація вимірної за Жорданом множини відкритими і замкненими множинами. Теорема: $m(\bullet)$ є мірою. Наслідки для функції довжини на P_1 і функції об'єму для P_m.
Лема про адитивну і невід'ємну функцію множин на півкільці. Функція множин λ_F на P_1. Теорема про те, що вона є мірою.

Продовження міри

Означення продовження функції множин. Приклад: довжина на P_1 і міра Жордана на K_1. Теорема про продовження міри з півкільця на кільце. Зауваження: таке продовження зберігає як скінченність, так і $\sigma-$скінченність. Приклади: продовження функції довжини і функції площі з відповідних півкілець.

Зовнішня міра

Означення зовнішньої міри (на 2^X). Приклад неадитивної зовнішньої міри.

Задання за мірою на кільці функції множин на 2^X. Теорема: це зовнішня міра; вона називається зовнішньою мірою, породженою мірою, що задана на кільці. Приклади породжених зовнішніх мір:

1. для міри на $K=\{\varnothing, X\}$;
2. для міри на півкільці півінтервалів з кінцями $k, k+1$.

Вимірність за Каратеодорі

Означення вимірності множини за *Каратеодорі.* Зауваження: для вимірності достатньо доводити лише нерівність; порожня і універсальна множини завжди вимірні за Каратеодорі. Продовження прикладу 1: описати усі вимірні множини.
Теорема Каратеодорі (про клас множин, вимірних відносно зовнішньої міри).
Означення повної міри. Приклад неповної міри. Наслідок з теореми Каратеодорі: $\bar{\mu}$ є повною мірою.
Теорема про вимірність елементів початкового кільця. Наслідок про включення класів множин при виконанні умов теореми Каратеодорі. Продовження прикладу 2: описати усі вимірні множини.
Теорема про наближення елементами кільця. Теорема про єдиність продовження міри на породжене $\sigma-$кільце.

Міра Лебега

Конструкція міри Лебега на прямій: функція довжини, її продовження з півкільця на кільце, зовнішня міра Лебега, означення класу S вимірних за Лебегом множин. Кожна борелева множина вимірна за Лебегом. Приклади вимірних за Лебегом множин на прямій та обчислення їх мір: одноточкова множина, скінченний відкритий інтервал, не більш ніж злічення множина (приклади таких), відкрита множина. Хронологічна таблиця різних продовжень функції довжини.
Конструкція міри Лебега в евклідовому просторі. Означення $\sigma-$алгебри S_m вимірних за Лебегом множин. Теорема про те, що міра Лебега є продовженням міри Жордана. Типовий приклад невимірної множини.
Конструкція міри Лебега - Стільтьєса.

Заряди

Означення заряду (на $\sigma-$алгебрі). Зауваження: заряд від порожньої множини, адитивність, скінченність заряду від підмножини кожної множини скінченного заряду, неперервність знизу і зверху. Приклад: дискретний заряд (на N).
Додатна і негативна множина. Лема про існування негативної підмножини. Теорема про розклад Гана універсального простору. Означення розкладу Гана. Приклад: розклад Гана для випадку дискретної міри.
Теорема про розклад Жордана заряду. Означення розкладу Жордана. Зауваження: додатна компонента успадковує скінченність і $\sigma-$скінченність у заряду; неєдиніість розкладу Жордана, але єдиність такого розкладу, якщо він породжений деяким розкладом Гана.

Відображення вимірних просторів

Означення вимірного простору і простору з мірою.
Загальні властивості відображень: прообраз множини, прообраз від об'єднання, перетину і різниці; прообраз $\sigma-$алгебри є також $\sigma-$алгеброю.
Означення вимірного відображення. Приклади таких відображень: тотожне, довільне у випадку $S_X = 2^X$. Означення вимірності відображення, заданого на вимірній підмножині.
Критерій вимірності відображення в термінах породжую чого класу множин.

Властивості вимірних функцій

Означення вимірної функції із значеннями в R. Приклад: індикатор. Наслідок з критерію вимірності про 5 еквівалентних умов.
Розширена пряма і борелева $\sigma-$алгебра на ній. Лема про породження такої борелевої $\sigma-$алгебри нескінченними проміжками. Означення вимірної функції із значеннями в $\overline{R}$. Наслідок з критерію вимірності для такої функції.
Означення функції на R^m, вимірної за Лебегом. Означення у випадку, коли функція задана на вимірній за Лебегом множині.
Означення борелевої функції на метричному просторі, а також на борелевій підмножині метричного простору. Якщо функція борелева, то вимірна за Лебегом.
Приклади борелевих функцій: індикатор від борелевої множини, неперервна функція на борелевій множині, монотонна функція на відкритому проміжку.
Теорема про вимірність суперпозиції відображень. Наслідок про функцію $F(f_1,..., f_m)$.

Операції над вимірними функціями

Теорема про операції над вимірними функціями. Застосування: $fI_A + gI_B$, проста вимірна функція, вимірність множини $\{f \le g\}$, вимірність додатної і від'ємної частини функції.
Теорема про граничний перехід для вимірних функцій.
Означення простої функції. Канонічне представлення простої вимірної функції. Критерій вимірності невід'ємної функції в термінах простих функцій. Наслідок про вимірну функцію довільного знаку.

Збіжність майже скрізь

Означення: властивість виконується майже скрізь; еквівалентне означення для випадку повної міри. Приклади.

Означення еквівалентних функцій; еквівалентне означення для випадку повної міри і для випадку вимірних функцій. Приклад: функція Діріхле. Теорема про вимірність еквівалентної функції.
Означення збіжності майже скрізь; еквівалентне означення для випадку повної міри і для випадку вимірних функцій. Приклади. Теорема про єдиність границі. Терема про вимірність граничної функції.
Означення верхньої і нижньої границі послідовності множин. Формули для цих границь. Теорема Єгорова. Приклад: у теоремі Єгорова не можна відкинути умову скінченності міри.

Збіжність за мірою

Означення збіжності за мірою. Теорема про єдиність границі. Приклад: сходинка, що пливе. Теорема Лебега про зв'язок між двома збіжностями.
Означення фундаментальності за мірою. Із збіжності за мірою випливає фундаментальність за мірою. Лема Рісса про фундаментальну за мірою послідовність. Наслідки: теорема Рісса, критерій збіжності за мірою.

Абстрактний інтеграл Лебега

Означення інтеграла від простої невід'ємної функції. Коректність. Монотонність.
Означення інтеграла від невід'ємної функції. II частина означення не суперечить I-й. Приклад: інтеграл від $f(x) = x$.
Означення інтеграла від вимірної функції. Означення інтегрованої функції. Простір $L(A, \lambda)$. Приклад: $f(x) = sign\ x$. Інтеграл для функції із значеннями в $\overline{R}$. Інтеграл по порожній множині.
Елементарні властивості інтеграла Лебега: інтеграл по множині нульової міри, інтеграл від сталої, монотонність інтеграла від невід'ємної функції, інтеграл від обмеженої функції, монотонність інтеграла для інтегрованих функцій, однорідність інтеграла, монотонність інтеграла як функції множини, інтегрованість – спадкова властивість.

Подальші властивості інтеграла Лебега

Теорема про $\sigma-$адитивність інтеграла від невід'ємної функції. Наслідок для інтегрованої функції. Наслідок: інтеграл від монотонної послідовності множин.
Теорема про адитивність інтеграла. Наслідки: інтеграл не залежить від значень на множині нульової міри, інтеграли від еквівалентних функцій співпадають. Приклад: функція Діріхле.
Подальші властивості: інтегрованість рівносильна абсолютній інтегрованості, твердження з інтегрованою мажорантою, інтегрована функція скінченна майже скрізь, коли інтеграл від невід'ємної функції дорівнює 0, наслідок: коли інтеграл по кожній вимірній множині дорівнює 0.
Теорема Лебега про монотонну збіжність.