

Питання для іспиту з елементів фінансової математики, 2015

I. Європейські опціони в моделі Кокса-Росса-Рубінштейна

1. Побудова моделі фінансового ринку Кокса-Росса-Рубінштейна.
2. Процедура перебудови портфелю за умови самофінансування. Закон збереження капіталу.
3. Поняття про Європейські та Американські опціони.
4. Поняття про хедж, мінімальний хедж та інвестиційну вартість.
5. **Існування умовного математичного сподівання та його властивості.**
6. Умовне математичне сподівання як проекція.
7. Властивості півмартингалів.
8. Приклади мартингалів і півмартингалів.
9. Математичне сподівання мартингала в марковський момент є сталим.
10. **Достатня умова мартингальності через марковські моменти.**
11. **Нерівність для початкового капіталу за наявності хеджу.**
12. **Розклад мартингала через базовий мартингал.**
13. **Лема про існування мінімального хеджу.**
14. Основна теорема про Європейський опціон.
15. Зауваження про від'ємні компоненти портфелю для мінімального хеджу.
16. **Європейський опціон без умови самофінансування.**
17. Відсутність арбітражу на B-S ринку.
18. **Вивід формули Кокса-Росса Рубінштейна для ціни опціону купівлі.**
19. Ціна Європейського опціону з гладкою функцією виплат виражається через ціну опціону call.
20. Паритет call – put: спосіб доведення через формули.
21. **Паритет call – put: спосіб доведення через арбітраж.**
22. **Чисельний приклад побудови хеджу на ринку валют.**
23. Врахування витрат в Європейському опціоні, коли витрати пропорційні поточній вартості акції.

II. Формула Блека-Шоулза

24. Вивід формули Блека-Шоулза безпосереднім підрахунком.
25. **Вивід формули Блека-Шоулза дискретною апроксимацією: асимптотика першого доданка.**
26. Вивід формули Блека-Шоулза дискретною апроксимацією: асимптотика другого доданка.

III. Американський опціон

27. Необхідна умова для існування хеджу в Американському опціоні.
28. **Основна теорема про Американський опціон.**
29. Еквівалентність Американського і Європейського опціонів купівлі (call).
30. Структура областей зупинки в Американському опціоні для марковської моделі цін акцій.

IV. Європейський опціон із дискретним імовірнісним простором

31. **Перша теорема про відділеність опуклих множин.**
32. Друга теорема про відділеність опуклих множин і наслідок.
33. Лема: якщо математичне сподівання стохастичної послідовності в марковський момент є сталим, то ця послідовність – мартингал.
34. Теорема Гаррісона-Пліски: з існування мартингальної міри впливає відсутність арбітражу.
35. **Теорема Гаррісона-Пліски: з відсутності арбітражу впливає існування мартингальної міри.**
36. З повноти ринку впливає єдиність мартингальної міри.
37. **З єдиності мартингальної міри впливає повнота ринку.**
38. З повноти ринку впливає розклад довільного мартингала.
39. З розкладу довільного мартингала впливає повнота ринку.
40. Застосування загальних теорем про повноту ринку та відсутність арбітражу.

V. Застосування стохастичних експонент

41. Алгебраїчні властивості стохастичних експонент.
42. Мартингальна характеристика самофінансованих стратегій – доведення через стохастичні експоненти.
43. **Максимізація логарифму від капіталу в моделі Кокса-Росса-Рубінштейна.**