

Матеріали до іспиту з ФА, 3 курс, 2015

Програма курсу

I. Гільбертів простір (не виноситься на іспит)

1. Ортонормовані системи векторів. Теорема Піфагора. Властивості ОНС.
2. Мінімальна властивість коефіцієнтів Фур'є. Нерівність Бесселя.
3. Ортонормовані базиси (ОНБ): означення, єдиність розкладу. Теорема про характеристизацію ОНБ.
4. Рівність Парсеваля. Приклади базисів.
5. Процедура ортогоналізації Грама-Шмідта, існування ортонормованого базиса в сепарабельному гільбертовому просторі.
6. Ізометрія сепарабельних гільбертових просторів.

II. Лінійні неперервні функціонали

1. Лінійні, обмежені та неперервні функціонали. Рівносильність обмеженості та неперервності лінійного функціоналу.
2. Норма функціоналу, приклади її обчислення.
3. Спряжений простір та його повнота.
4. Теорема Рісса в H .
5. Лінійні функціонали в $l_p, 1 < p < \infty$.
6. Лінійні функціонали в $L_p(T, \mu), 1 < p < \infty$, та $C[a, b]$.
7. Простір L_∞ та спряжений до простору L_1 .
8. Продовження функціоналу з підпростору гільбертового простору. Продовження ЛНФ за неперервністю.
9. Продовження ЛНФ з підпростору на підпростір, розмірність якого більша на 1, із збереженням норми.
10. Теорема Гана-Банаха про продовження функціоналу в дійсному сепарабельному випадку.
11. Приклад неєдиного продовження ЛНФ із збереженням норми.
12. Наслідки з теореми Гана-Банаха.
13. Вкладення у другий спряжений простір.
14. Рефлексивні простори, приклади.
15. Нереклексивність простору $C[a, b]$.

III. Лінійні неперервні оператори

1. Лінійність, обмеженість, неперервність операторів у нормованому просторі.
2. Норма оператора, простір лінійних операторів, його повнота.
3. Інтегральні оператори Фредгольма і Вольтерра у просторі $C[a, b]$, їх норма.
4. Діагональний оператор в l_2 . Його норма.
5. Матричне представлення оператора в гільбертовому просторі. Пряма сума операторів та її матричне зображення у відповідному базисі. Функціонал як лінійний оператор.
6. Теорема Банаха-Штейнгауза.
7. Наслідок теореми Банаха-Штейнгауза для функціоналів.
8. Теореми Ландау.

9. Слабка збіжність функціоналів, критерій.
10. Лема Рімана-Лебега як застосування критерію слабкої збіжності функціоналів.
11. Слабка повнота спряженого простору та слабка компактність кулі.
12. Слабка збіжність елементів простору, критерій.
13. Критерії слабкої збіжності в конкретних просторах.
14. Повнота рефлексивного простору відносно слабкої збіжності. Слабка компактність кулі в l_p .
15. Операторні збіжності: рівномірна, сильна, слабка. Приклади, порівняння різних типів збіжності.
16. Неперервність добутку операторів відносно рівномірної збіжності.
17. Добуток операторів і його властивості. Добуток інтегральних операторів.
18. Ядро та образ оператора.
19. Алгебраїчний обернений до оператора, критерій його існування. Приклади.
20. Неперервний обернений оператор, аналіз означення. Критерій неперервної оборотності через нерівність знизу для норми.
21. Теорема Банаха про обернений оператор (без доведення). Оборотність збуреного одиничного оператора.
22. Спряжений оператор в просторі Гільберта, приклади.
23. Властивості спряжених операторів.
24. Самоспряжені оператори: матричне зображення, критерій самоспряженості в термінах квадратичної форми.
25. Норма квадрату самоспряженого оператора.
26. Унітарні та ізометричні оператори.
27. Ортопроектор.
28. Оператор Гільберта-Шмідта, норма Гільберта-Шмідта та її властивості.
29. Лема про базис у просторі функцій від двох змінних.
30. Ядро Гільберта-Шмідта та інтегральний оператор Гільберта-Шмідта в $L_2[a, b]$.
31. Спряжений інтегральний оператор в $L_2[a, b]$, умова самоспряженості.
32. Предкомпактні множини. Означення компактного оператора. Скінченновимірний оператор та його компактність.
33. Компактність інтегрального оператора в $C[a, b]$.
34. Властивості компактних операторів.
35. Наближення компактного оператора скінченновимірними операторами в гільбертовому просторі.
36. Компактність оператора Гільберта-Шмідта в \mathbb{N} .
37. Оператор, спряжений до компактного.

Твердження з доведеннями

Жирним виділені більш складні доведення, які увійдуть у перші питання білетів. Простіші доведення увійдуть у другі питання білетів.

1. Рівносильність неперервності та обмеженості ЛНФ.
2. Теорема про повноту (за нормою) спряженого простору.
3. **Теорема Рісса про ЛНФ в \mathbb{N} .**
4. Спряжений простір до $l_p, 1 < p < \infty$.

5. Норма ЛНФ в $L_p, 1 < p < \infty$.
6. Норма ЛНФ в $C[a, b]$.
7. Продовження ЛНФ із щільної лінійної множини за неперервністю.
8. **Теорема Гана-Банаха.**
9. Наслідок з теореми Гана-Банаха про одиничний функціонал, рівний 0 на підпросторі.
10. Функціонал F_x . Теорема про канонічне вкладення ЛНП у другий спряжений простір.
11. Приклади рефлексивних ЛНП. Нерефлексивний простір $C[a, b]$.
12. Норма оператора в R_∞^n .
13. Норма оператора з ермітовою матрицею в просторі C_2^n .
14. Норма інтегрального оператора Фредгольма з неперервним ядром.
15. Норма діагонального оператора в l_2 .
16. **Теорема Банаха-Штейнгауза.**
17. Теорема Ландау для l_p .
18. Теорема Ландау для L_p .
19. **Критерій слабкої збіжності функціоналів.**
20. Теорема Рімана-Лебега про збіжність інтеграла до 0.
21. Теорема про слабку повноту спряженого простору.
22. Теорема про слабку компактність кулі в спряженому просторі.
23. Критерій слабкої збіжності в $l_p, 1 < p < \infty$.
24. Критерій слабкої збіжності в $L_p[a, b], 1 < p < \infty$.
25. Теорема про слабку повноту рефлексивного простору.
26. Теорема про слабку компактність кулі в рефлексивному l_p .
27. Еквівалентність трьох операторних збіжностей в C^m .
28. Два приклади про те, що операторні збіжності є різними.
29. Добуток двох інтегральних операторів Фредгольма з неперервними ядрами.
30. Алгебраїчний обернений до оператора інтегрування.
31. Критерій неперервної оборотності через нерівність.
32. Критерій неперервної оборотності діагонального оператора.
33. **Теорема про збурений одиничний оператор.**
34. Похибка наближення до розв'язку рівняння $x - Ax = y$.
35. Існування та єдиність спряженого оператора.
36. Критерій самоспряженості оператора в комплексному гільбертовому просторі в термінах квадратичної форми.
37. Теорема про те, що оператори Гільберта-Шмідта утворюють ідеал в просторі $L(H)$.
38. Інтегральний оператор Гільберта-Шмідта: коректність означення та нерівність для норми оператора.
39. Лема про базис в $L_2([a, b]^2)$.
40. Формула для норми Гільберта-Шмідта інтегрального оператора.

41. Спряжений оператор до інтегрального оператора Гільберта-Шмідта.
42. Компактність інтегрального оператора з неперервним ядром.
43. Одиначний оператор в нескінченновимірному лінійному просторі не є компактним.
44. Теорема про рівномірну границю компактних операторів в банаховому просторі.
45. Критерій компактності оператора в H в термінах наближення скінченновимірними операторами.
46. Компактність оператора Гільберта-Шмідта в H .
47. Спряжений до скінченновимірного оператора є також скінченновимірним.
48. Теорема про спряжений оператор до компактного.