

## Питання до іспиту з ФА, 3 курс, 2013

Твердження з доведеннями. (Складніші доведення виділено **жирним**).

### Матеріал, що читався у 5-му семестрі

#### *Лінійні нормовані простори*

1. У скінченновимірному просторі всі норми еквівалентні.
2. **Теорема про «майже перпендикуляр».**
3. Властивості скалярного добутку: анти лінійність за 2-м аргументом, нерівність Коші-Шварца.
4. Рівність паралелограма. Норма, породжена скалярним добутком.
5. Поляризаційна тотожність.

#### *Гільбертові простори*

6. Теорема про найкраще наближення в  $H$  елементами підпростору.
7. **Теорема про розклад гільбертового простору.**
8. Мінімальна властивість коефіцієнтів Фур'є. Нерівність Бесселя.
9. Критерій того, що ортонормована система є базисом.
10. Тригонометрична система утворює базис в  $L_2[-\pi, \pi]$ .
11. Процедура ортогоналізації Грама-Шмідта. Існування ортонормованого базису в сепарабельному гільбертовому просторі.
12. Ізометрія сепарабельних гільбертових просторів.

### Матеріал, що читався в 6-му семестрі

#### *Лінійні функціонали*

1. Неперервність лінійного функціоналу рівносильна його обмеженості.
2. Перевірити, що норма лінійного функціоналу задовольняє аксіомам норми.
3. Теорема про повноту спряженого простору відносно збіжності за нормою.
4. Норма ЛНФ в  $R_1^m$ .
5. **Теорема Ріса про ЛНФ в  $H$ .**
6. **Загальний вигляд ЛНФ в  $l_p$  і його норма,  $1 < p < \infty$ .**
7. Норма інтегрального ЛНФ в  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ .
8. **Норма інтегрального ЛНФ в дійсному просторі  $C[a,b]$ .**
9. Продовження ЛНФ за неперервністю.
10. **Продовження ЛНФ на лінійну множину розмірності на 1 більше.**
11. **Теорема Гана-Банаха у дійсному і сепарабельному випадку.**
12. Наслідок з теореми Гана-Банаха про одиничний функціонал, рівний 0 на підпросторі.
13. **Функціонал  $F_x$ . Теорема про канонічне вкладення ЛНП у другий спряжений простір.**
14. Приклади рефлексивних ЛНП. Нерефлексивний простір  $C[a,b]$ .

#### *Лінійні оператори*

15. Норма оператора в  $R_\infty^n$ .

16. Норма оператора з ермітовою матрицею в просторі  $C_2^n$ .
17. Норма інтегрального оператора Фредгольма з неперервним ядром.
- 18. Теорема Банаха-Штейнгауза.**
19. Критерій слабкої збіжності функціоналів.
20. Теорема Рімана-Лебега про збіжність інтеграла до 0.
21. Теорема про слабку повноту спряженого простору.
- 22. Теорема про слабку компактність кулі в спряженому просторі.**
23. Критерій слабкої збіжності в  $l_p$ ,  $1 < p < \infty$ .
24. Критерій слабкої збіжності в  $L_p[a, b]$ ,  $1 < p < \infty$ .
25. Теорема про слабку повноту рефлексивного простору.
26. Теорема про слабку компактність кулі в рефлексивному  $l_p$ .
27. Еквівалентність трьох операторних збіжностей в  $C^m$ .
28. Два приклади про те, що операторні збіжності є різними.
29. Добуток двох інтегральних операторів Фредгольма з неперервними ядрами.

#### *Обернені оператори*

30. Алгебраїчний обернений до оператора інтегрування.
31. Критерій неперервної оборотності через нерівність.
32. Критерій неперервної оборотності діагонального оператора.
- 33. Теорема про збурений одиничний оператор.**
34. Похибка наближення до розв'язку рівняння  $x - Ax = y$ .

#### *Класи операторів в $H$*

35. Існування та єдиність спряженого оператора.
36. Властивості спряжених операторів.
37. Критерій самоспряженості оператора в термінах квадратичної форми.
38. Оператор проектування та його властивості.
39. Порівняння операторної норми і норми Гільберта-Шмідта.
40. Властивості операторів Гільберта-Шмідта.
41. Інтегральний оператор Гільберта-Шмідта і нерівність для його норми.
42. Лема про базис у просторі  $L_2$  функцій від двох змінних.
43. Інтегральний оператор з інтегрованим у квадраті ядром є оператором Гільберта-Шмідта.
44. Оператор, спряжений до інтегрального оператора Гільберта-Шмідта.

#### *Компактні оператори*

45. Умови предкомпактності кулі в ЛНП.
46. Приклади компактних операторів: інтегральні оператори з виродженим ядром та з неперервним ядром.
47. Теорема про рівномірну границю компактних операторів.
- 48. Основна теорема про компактні оператори в  $H$ .** Наслідок для оператора Гільберта-Шмідта.
49. Оператор, спряжений до компактного.