

Питання до I колоквиуму з ФА, 3 курс, 2017

Твердження слід писати з доведеннями. Також слід писати означення, що стосуються сформульованих тверджень. У білеті одне теоретичне питання (10 балів), а також задача на обчислення норми функціонала (10 балів).

Гільбертові простори

1. Мінімальна властивість коефіцієнтів Фур'є. Нерівність Бесселя.
2. Критерій того, що ортонормована система є базисом.
3. Тригонометрична система утворює базис в $L_2[-\pi, \pi]$.
4. Процедура ортогоналізації Грама-Шмідта. Існування ортонормованого базису в сепарабельному гільбертовому просторі.
5. Ізометрія сепарабельних гільбертових просторів.

Лінійні функціонали

1. Неперервність лінійного функціоналу рівносильна його обмеженості.
2. Перевірити, що норма лінійного функціоналу задовольняє аксіоми норми.
3. Теорема про повноту спряженого простору відносно збіжності за нормою.
4. Норма ЛНФ в R_1^m .
5. Теорема Ріса про ЛНФ в H .
6. Загальний вигляд ЛНФ в l_p і його норма, $1 < p < \infty$.
7. Норма інтегрального ЛНФ в L_p , $1 < p < \infty$.
8. Норма інтегрального ЛНФ в дійсному просторі $C[a, b]$.
9. Продовження ЛНФ за неперервністю.
10. Продовження ЛНФ на лінійну множину розмірності на 1 більше.
11. Теорема Гана-Банаха у дійсному і сепарабельному випадку.
12. Наслідок з теореми Гана-Банаха про одиничний функціонал, рівний 0 на підпросторі.
13. Функціонал F_x . Теорема про канонічне вкладення ЛНП у другий спряжений простір.
14. Приклади рефлексивних ЛНП. Нерефлексивний простір $C[a, b]$.

Лінійні оператори

15. Норма оператора в R_∞^n .
16. Норма оператора з ермітовою матрицею в просторі C_2^n .
17. Норма інтегрального оператора Фредгольма з неперервним ядром.
18. Теорема Банаха-Штейнгауза.
19. Теорема Е. Ландау про l_p , $1 \leq p \leq \infty$.
20. Теорема Е. Ландау про L_p , $1 < p < \infty$.
21. Критерій слабкої збіжності функціоналів.
22. Лема Рімана-Лебега про збіжність інтеграла до 0.
23. Теорема про слабку повноту спряженого простору.
24. Теорема про слабку компактність кулі в спряженому просторі.
25. Критерій слабкої збіжності в l_p , $1 < p < \infty$.
26. Критерій слабкої збіжності в $L_p[a, b]$, $1 < p < \infty$.