

Питання до I колоквіуму з ФА, 3 курс, 2015

Твердження слід писати з доведеннями. Складніші доведення виділено **жирним**. Також слід писати означення, що стосуються сформульованих тверджень.

У білеті два теоретичні питання (одне «жирне», інше «нежирне»), а також задача на обчислення норми функціонала за допомогою спряжених просторів.

Матеріал, що читався у 5-му семестрі на лекціях із теорії міри

Лінійні нормовані простори

1. У скінченновимірному просторі всі норми еквівалентні.
2. **Теорема про «майже перпендикуляр».**
3. Властивості скалярного добутку: анти лінійність за 2-м аргументом, нерівність Коші-Шварца.
4. Рівність паралелограма. Норма, породжена скалярним добутком.
5. Поляризаційна тотожність.

Гільбертові простори

6. Теорема про найкраще наближення в H елементами підпростору.
7. **Теорема про розклад гільбертового простору.**
8. Мінімальна властивість коефіцієнтів Фур'є. Нерівність Бесселя.
9. Критерій того, що ортонормована система є базисом.
10. Тригонометрична система утворює базис в $L_2[-\pi, \pi]$.
11. Процедура ортогоналізації Грама-Шмідта. Існування ортонормованого базису в сепарабельному гільбертовому просторі.
12. Ізометрія сепарабельних гільбертових просторів.

Матеріал, що читався в 6-му семестрі

Лінійні функціонали

1. Неперервність лінійного функціоналу рівносильна його обмеженості.
2. Перевірити, що норма лінійного функціоналу задовольняє аксіоми норми.
3. Теорема про повноту спряженого простору відносно збіжності за нормою.
4. Норма ЛНФ в R_1^m .
5. **Теорема Ріса про ЛНФ в H .**
6. **Загальний вигляд ЛНФ в l_p і його норма, $1 < p < \infty$.**
7. Норма інтегрального ЛНФ в L_p , $1 < p < \infty$.
8. **Норма інтегрального ЛНФ в дійсному просторі $C[a,b]$.**
9. Продовження ЛНФ за неперервністю.
10. **Продовження ЛНФ на лінійну множину розмірності на 1 більше.**
11. **Теорема Гана-Банаха у дійсному і сепарабельному випадку.**
12. Наслідок з теореми Гана-Банаха про одиничний функціонал, рівний 0 на підпросторі.

13. Функціонал F_x . Теорема про канонічне вклядення ЛНП у другий спряжений простір.

14. Приклади рефлексивних ЛНП. Нереклексивний простір $C[a, b]$.

Лінійні оператори

15. Норма оператора в R_∞^n .

16. Норма оператора з ермітовою матрицею в просторі C_2^n .

17. Норма інтегрального оператора Фредгольма з неперервним ядром.

18. Теорема Банаха-Штейнгауза.

19. Теорема Е. Ландау про l_p , $1 \leq p \leq \infty$.

20. Теорема Е. Ландау про L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

21. Критерій слабкої збіжності функціоналів.

22. Теорема Рімана-Лебега про збіжність інтеграла до 0.

23. Теорема про слабку повноту спряженого простору.

24. Теорема про слабку компактність кулі в спряженому просторі.

25. Критерій слабкої збіжності в l_p , $1 < p < \infty$.

26. Критерій слабкої збіжності в $L_p[a, b]$, $1 < p < \infty$.

27. Теорема про слабку повноту рефлексивного простору.

28. Теорема про слабку компактність кулі в рефлексивному l_p .